aus $\mathbb{R}^2$, besteht keine Verwechselungsgefahr.

Bemerkung: 1.) In $T_{(u,v)}X$ haben wir die kanonische Basis $X_u(u,v)$, $X_v(u,v)$ bzgl. derer die Fundamentalmatrix $G_{(u,v)}$ der 1ten Fundamentalform lautet

$$G_{(u,v)} = \begin{pmatrix} I(X_u,X_u) & I(X_u,X_v) \\ I(X_v,X_u) & I(X_v,X_v) \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

Offenbar ist $G_{(u,v)}$ auch die Fundamentalmatrix von $I_{(u,v)}$ (bei Interpretation als Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$) bzgl. der kanonischen Basis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$.

2.) Teil b) der Definition interpretiert die 1te Fundamentalform als eine parameterabhängige Schar $(u,v) \mapsto$ $I_{(u,v)} = g_{(u,v)}$, $(u,v) \in \Omega$, von Skalarprodukten (s. Satz 3) auf $\mathbb{R}^2$.

Satz 3: i) Die Erste Fundamentalform I einer Fläche $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist positiv definit. (man meint hier $I_{(u,v)}$ $\forall (u,v) \in \Omega$)

ii) $(u,v) \mapsto I_{(u,v)}$ ist differenzierbar auf Ω, d.h. die Koeffizienten $g_{ik}: \Omega \to \mathbb{R}$ der Fundamentalmatrix sind differenzierbare Funktionen.

Beweis: i) klar, wenn $I_{(u,v)}$ gemäß a) definiert wird; gemäß Definitionsvariante b) aber auch klar, da $\operatorname{rg} DX \equiv 2$, also $DX_{(u,v)}$ injektiv, und $I = DX'' \cdot DX''$.

ii) gemäß $g_{11} = |X_u|^2$, $g_{12} = X_u \cdot X_v$, $g_{22} = |X_v|^2$ ist auch hier nichts weiter zu zeigen. $\square$

Beispiel: 1.) Erste Fundamentaform für Graphen

Sei $X: \Omega \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ mit $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hier ist an jeder Stelle $(u,v) \in \Omega$

$$\begin{cases} \mathcal{E} = X_u \cdot X_u = 1 + (\partial_u f)^2 , \\ \mathcal{G} = X_v \cdot X_v = 1 + (\partial_v f)^2 , \\ \mathcal{F} = X_u \cdot X_v = \partial_u f \, \partial_v f \end{cases}$$

und die Fundamentalmatrix der Ersten Fundamentalform lautet

$$G = \begin{pmatrix} 1 + (\partial_u f)^2 & \partial_u f \, \partial_v f \\ \partial_u f \, \partial_v f & 1 + (\partial_v f)^2 \end{pmatrix} .$$

2.) <u>Erste Fundamentalform für Rotationsflächen</u>

Wir betrachten o. E.

$$X(u,v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

mit $f(v) > 0$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a,b)$. Mit

$$X_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0),$$

$$X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$$

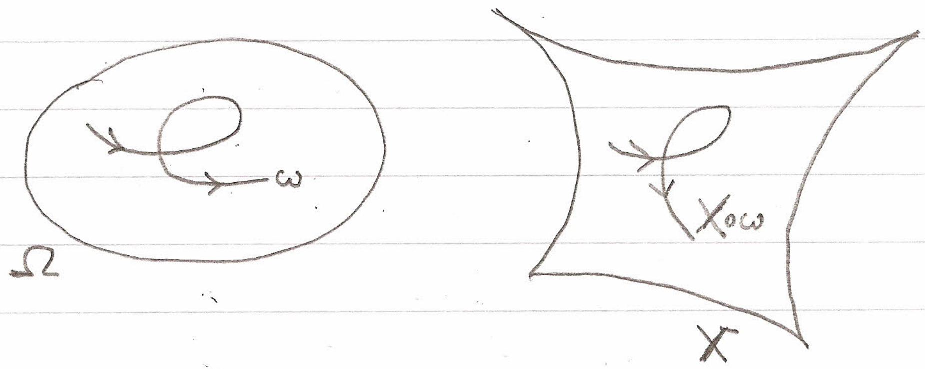
lautet die Fundamentalmatrix an einer beliebigen Stelle (u,v)

$$G_{(u,v)} = \begin{pmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Winkelvariable u geht in keiner Weise ein, was nicht überrascht.

<u>Geometrische Interpretation der Ersten Fundamentalform</u>:

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche ; $\omega: [a,b] \longrightarrow \Omega$ differenzierbar und $\alpha := X \circ \omega$.



α ist Kurve in der Fläche X mit Länge

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt =$$

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dt} (X \circ \omega)(t) \right| dt =$$

$$\int_a^b \left| DX_{\omega(t)}(\omega'(t))\right| dt.$$

In $DX_{\omega(t)}(\omega'(t))$ wirkt die Ableitung $DX_{\omega(t)}$ von X an der Stelle $\omega(t)$ auf den Tangentenvektor $\omega'(t) \in \mathbb{R}^2$.

Mit $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ ist

$$DX_{\omega(t)}(\omega'(t)) = \omega_1'(t)\, X_u(\omega(t)) + \omega_2'(t) X_v(\omega(t)),$$

also gilt

$$\left| DX_{\omega(t)}(\omega'(t))\right| = \left(DX_{\omega(t)}(\omega'(t)) \cdot DX_{\omega(t)}(\omega'(t))\right)^{1/2} =$$

$$I_{\omega(t)}(\omega'(t), \omega'(t))^{1/2},$$

und man bekommt:

$$L(X \circ \omega) = \int_a^b I_{\omega(t)}(\omega'(t), \omega'(t))^{1/2}\, dt.$$

Mit der Ersten Fundamentalform können wir also die Länge der Kurve $X \circ \omega$ berechnen. Später werden wir noch sehen, was I mit Flächenmessung zu tun hat ($\rightarrow$ p. 153).

Wir schauen uns noch an, wie sich I unter "Transformationen" verhält.

<u>Satz 4:</u> (<u>Invarianz von I</u>)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

i) Sei $B := R + T$ mit einer Rotation R und einer Translation T. (B heißt dann eine Bewegung von $\mathbb{R}^3$.) <u>Dann ist $\tilde{X} := B \circ X$ eine Fläche</u> (verschoben und rotiert), und es gilt für alle $U, V \in T_{(u,v)} X$:

$$I\,(U,V) = \tilde{I}\,(R(U), R(V)).$$

ii) Sei $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine Parametertransformation und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt für die Erste Fundamentalform $\tilde{I}$ von $\tilde{X}$

$$\tilde{I}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = I_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}), D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right)$$

für alle $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U},\tilde{V} \in \mathbb{R}^2$.

Beweis: i) Dass mit X auch $B \circ X$ eine Fläche ist, folgt trivial, denn $D(B \circ X) = R \circ DX$, und wegen $\operatorname{Rang} R = 3$ folgt $\operatorname{Rang} D(B \circ X) \equiv 2$.

Außerdem gilt: $T_{(u,v)}(B \circ X) = R(T_{(u,v)} X)$.

ii) Für $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U},\tilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist per Definition

$$\tilde{I}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = D\tilde{X}|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) \cdot D\tilde{X}|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}) =$$

$$\left[\left(DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} \circ D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}\right)(\tilde{U})\right] \cdot \left[\ldots\ldots(\tilde{V})\right] =$$

$$DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\Big(\underbrace{D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U})}_{\in \mathbb{R}^2}\Big) \cdot DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right) =$$

$$I_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}), D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right). \qquad \square$$

<Übung> Hat die Parametertransformation $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ die Form $\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$, so gilt für die Fundamentalmatrizen $(\tilde{g}_{ij})$ von $\tilde{X} = X \circ \varphi$ und (g_{kl}) von X die Formel $(\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$

$$\boxed{\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}) = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}_i}(\tilde{u}) \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}_j}(\tilde{u}) \cdot g_{kl}(\varphi(\tilde{u}))} \; .$$

Wir wollen jetzt die Zweite Fundamentalform einer Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, einführen mit dem Fernziel, etwas über die Krümmung von X sagen zu können. Krümmung von X bei $(u,v) \in \Omega$ bedeutet anschaulich die Veränderung der Lage von $T_{(u,v)}X$, die man auch durch die Veränderung des Normalenvektors N messen kann. Deshalb gehen wir zurück zur Gauß-Abbildung $N : \Omega \to S^2$, $N = X_u \times X_v / |X_u \wedge X_v|$.

Es gilt

<u>Satz 5:</u> $$\boxed{DN_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) \subset T_{(u,v)}X.}$$

<u>Interpretation:</u> N ist eine Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}^3$, so dass die Ableitung $DN_{(u,v)}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ darstellt. In Satz 5 steht, dass diese lineare Abbildung im Unterraum $T_{(u,v)}X$ von $\mathbb{R}^3$ hat.

Beweis: Es gilt für $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$

$$DN_{(u,v)}(w) = w_1 N_u(u,v) + w_2 N_v(u,v).$$

Nun ist $1 \equiv N \cdot N$, also

$$0 = (N \cdot N)_u = N_u \cdot N, \quad 0 = (N \cdot N)_v = N_v \cdot N.$$

Die Vektorfelder N_u, N_v sind daher orthogonal zu N, m. a. W. sie sind tangential, so dass $DN_{(u,v)}(w) \in T_{(u,v)}X$ bewiesen ist.

$\square$

<u>Satz 6 (+ Definition)</u>: Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (U,V) \mapsto -DN_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V) \in \mathbb{R}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underset{T_{(u,v)}X}{\mathbin{\rotatebox{90}{$\subset$}}} \qquad\qquad\quad \underset{T_{(u,v)}X}{\mathbin{\rotatebox{90}{$\subset$}}}$$

ist eine <u>symmetrische Bilinearform</u> auf $\mathbb{R}^2$, genannt die <u>Zweite Fundamentalform</u> $\mathrm{II}_{(u,v)}$ von X im Punkt $(u,v) \in \Omega$.

Beweis: Da die Ableitungen $DN_{(u,v)}$, $DX_{(u,v)}$ linear sind, ist $\mathrm{II}_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear. Per Definition von N ist

$$X_u \cdot N = 0 = X_v \cdot N,$$

also:

$$N_v \cdot X_u = (N \cdot X_u)_v - N \cdot X_{uv} = -N \cdot X_{uv},$$

$$N_u \cdot X_v = (N \cdot X_v)_u - N \cdot X_{vu} = -N \cdot X_{uv},$$

$$N_v \cdot X_u = N_u \cdot X_v .$$

Das bedeutet für die kanonische Basis (e_1, e_2) von $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_1, e_2) = -DN_{(u,v)}(e_1) \cdot DX_{(u,v)}(e_2) =$$

$$- N_u(u,v) \cdot X_v(u,v) = - N_v(u,v) \cdot X_u(u,v) = \ldots =$$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_2, e_1),$$

womit die Symmetrie bewiesen ist. $\square$

Wie auch für I gibt es eine andere Interpretation der Zweiten Fundamentalform: Sind $\mathcal{U}, V \in T_{(u,v)}X$, so liegen $(DX_{(u,v)})^{-1}(\mathcal{U}) =: \tilde{\mathcal{U}}, (DX_{(u,v)})^{-1}(V) =: \tilde{V}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathrm{II}_{(u,v)}(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{V})$ ist wohldefiniert.

Statt $\mathrm{II}_{(u,v)}(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{V})$ schreibt man

$$\boxed{\mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}(\mathcal{U}, V) = - DN_{(u,v)}\left((DX_{(u,v)})^{-1}\mathcal{U}\right) \cdot V}$$

und gewinnt mit $\mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}$ eine symmetrische